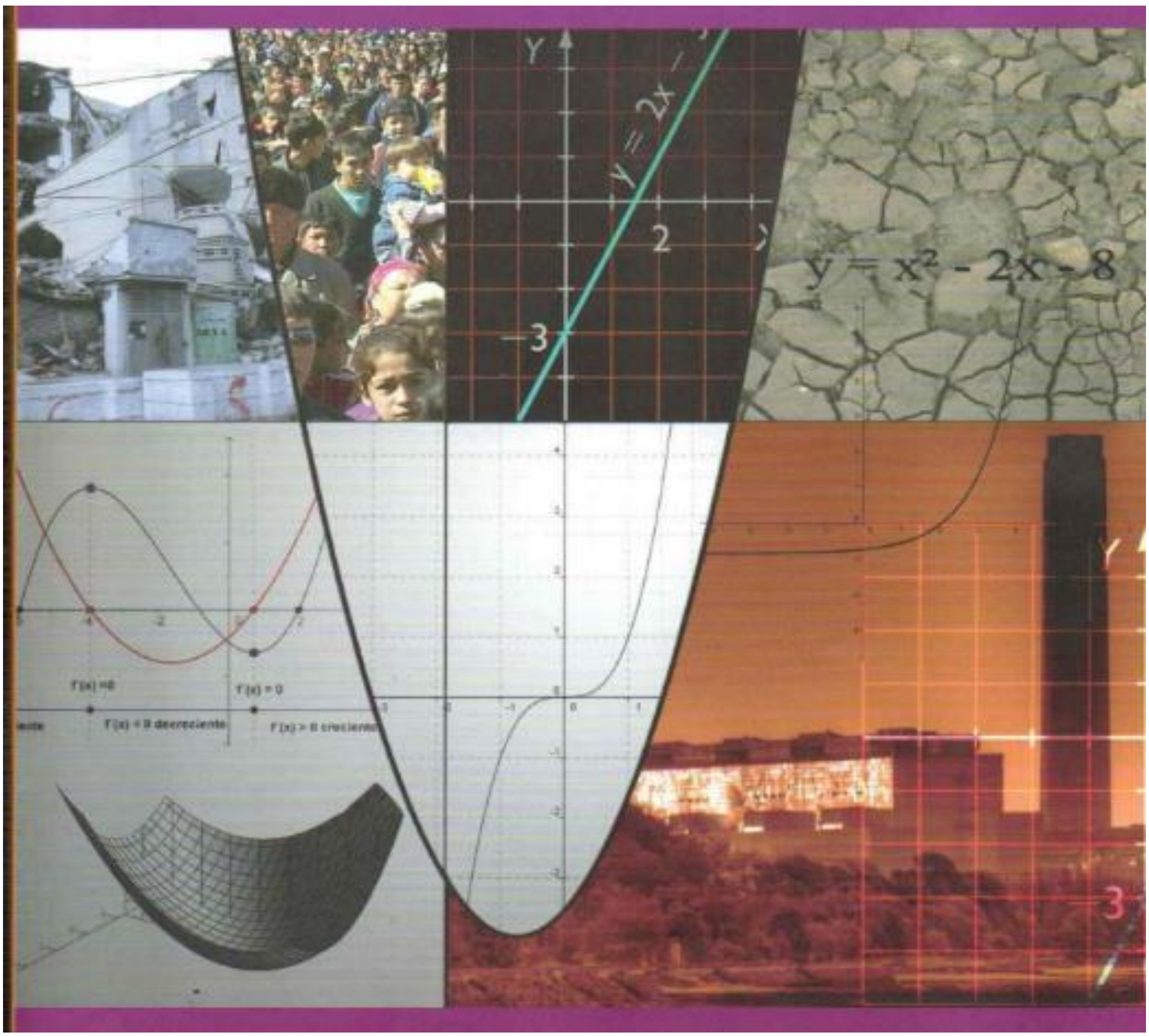
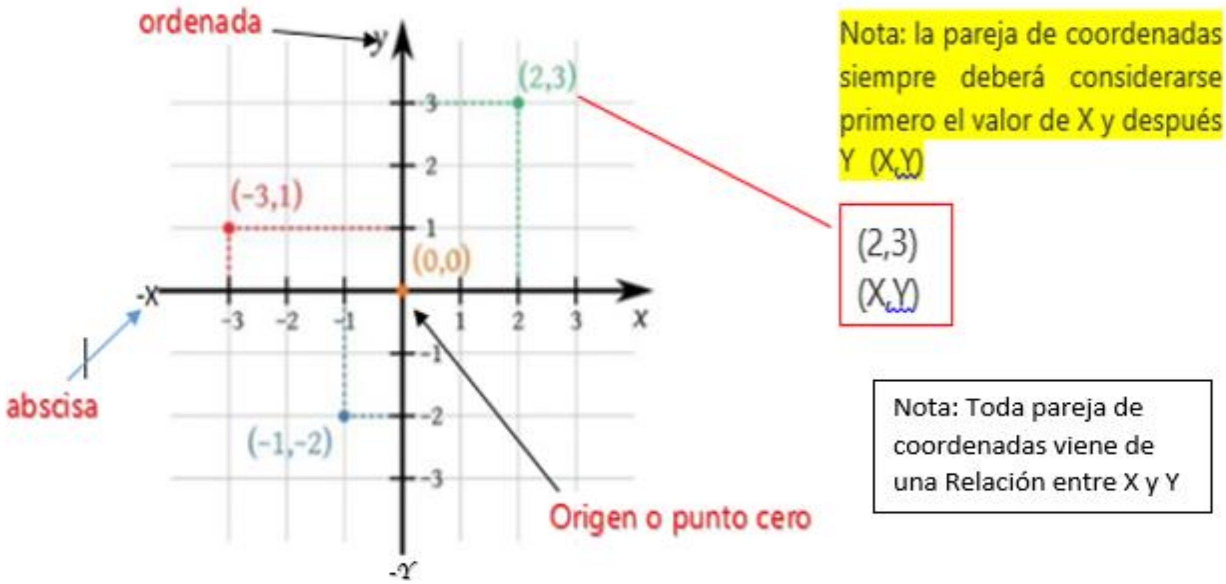
SPAyT
Subsistema de Preparatoria Abierta
y Telebachillerato del Estado de Chihuahua

CÁLCULO_EN_FENOMENOS NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES



GUÍA MODULO 15
CÁLCULO_EN_FENOMENOS_NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES

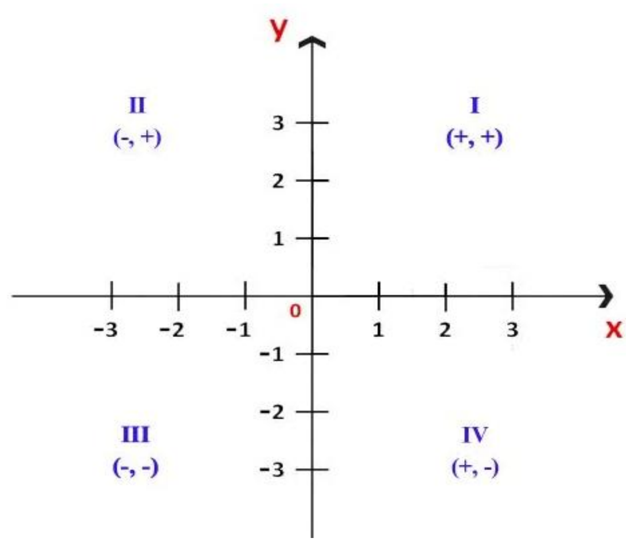
PLANO CARTESIANO.



Grafica de una función: Conjunto de puntos (x, y) que forman la solución de una función y = f(x)

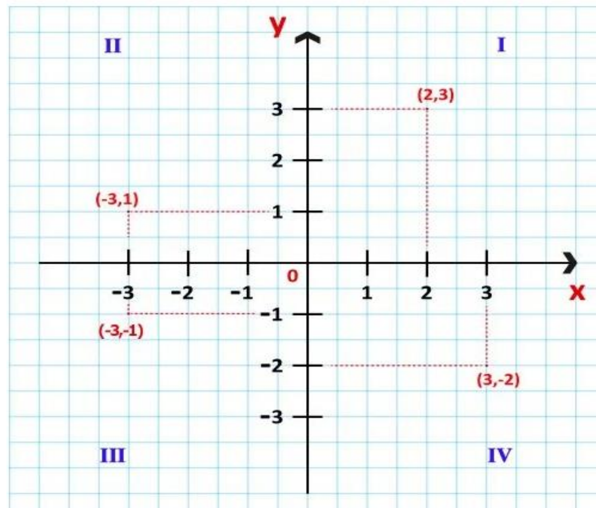
Se llama cuadrantes a las cuatro áreas que se forman por la unión de las dos rectas perpendiculares. Los puntos del plano se describen dentro de estos cuadrantes. Los cuadrantes se enumeran tradicionalmente con números romanos: I, II, III y IV

Cuadrante I: la abscisa y la ordenada son positivas.
Cuadrante II: la abscisa es negativa y la ordenada positiva.
Cuadrante III: tanto la abscisa como la ordenada son negativas.
Cuadrante IV: la abscisa es positiva y la ordenada negativa.



En este ejemplo, las coordenadas de los puntos en cada cuadrante son:

cuadrante I, P (2, 3)
cuadrante II, P (-3, 1)
cuadrante III, P (-3, -1)
cuadrante IV, P (3, -2)



FUNCIONES

Función: Es una relación entre dos conjuntos llamados dominio y codominio de manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del codominio, cumpliendo con una regla de correspondencia.

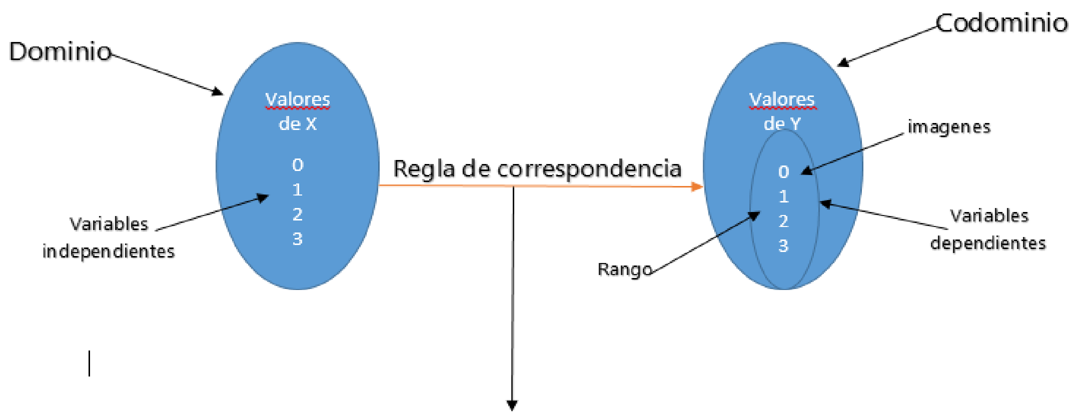
La notación para describir una función matemática es:

y = f (x)
se lee como: y es función de x.

Las funciones tienen cuatro componentes principales:

1. El dominio o conjunto de los valores de la variable **independiente X** para los cuales está definida la función. Dichos valores se ubican a lo largo del eje horizontal (abscisas) del plano cartesiano y permiten que los valores de la variable dependiente y queden determinados por la relación:
f (x) = y.
2. La regla f(x) que relaciona cada valor de la variable independiente x con un único valor de la variable dependiente y.
3. La imagen o conjunto de los valores de la variable dependiente y que se ubican a lo largo del eje vertical (ordenadas), y cuyo valor se determina al aplicar la función a los valores asignados de la variable x.
4. La gráfica de la función o el conjunto de puntos en el plano cartesiano (x, y) = (x, f (x)).

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN.



A cada valor de la variable independiente x le corresponde uno y solo un valor de la variable dependiente y.

En matemáticas se define a los elementos X del conjunto de partida dominio que se relacionan con los elementos Y del conjunto de llegada denominado condominio. Esta relación puede ser expresada además del mostrado diagrama de flechas anterior por:

Fórmula **f(X) = 5x- 9**

Parejas de coordenadas **(2, 4) (4, 8) (6, 12) (8, 16) (10, 20)**

Imagen: Conjunto de valores de la variable dependiente ubicados en el eje vertical "Y" (ordenadas) y cuyos valores se determinan al aplicar la función a los valores que se le asignen a la variable independiente "X"

Rango: En matemáticas, y más específicamente en teoría informal de conjuntos, el rango de una función se refiere al codominio o a la imagen de la función.

¿COMO SABER SI ES FUNCIÓN?

Existen dos métodos muy prácticos para identificar si una determinada relación corresponde a una función:

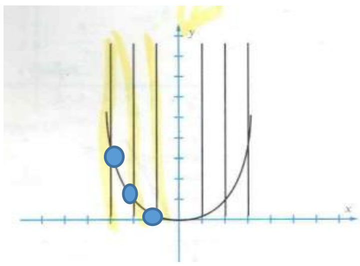
1.- En la Pareja de coordenadas

(2, 4) (4, 8) (6, 12) (8, 16) (10, 20) Si la variable X no se repite, es decir a cada valor de x le corresponde uno y solo un valor de las variables y **SI ES FUNCIÓN**

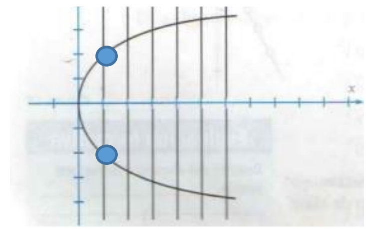
(**2**, 4) (**2**, 8) (6, 12) (8, 16) (10, 20) Si la variable X se repite, es decir a un valor de x le corresponde más de un valor de las variables y NO **ES FUNCIÓN**

2. Método de la vertical

Al graficar una relación o parejas de coordenadas y obtener su lugar geométrico se le trazan líneas verticales, si estas líneas verticales tocan un solo punto de la línea, curva o del lugar geométrico esta se determina **FUNCIÓN**



Al graficar una relación o parejas de coordenadas y obtener su lugar geométrico se le trazan líneas verticales, si estas líneas verticales tocan MAS DE UN punto de la línea, curva o del lugar geométrico esta se determina **NO FUNCIÓN**



CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES.

- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinómicas
      - Constantes
      - De 1er grado
      - Cuadráticas
    - Racionales
    - Radicales
    - A trozos
  - Trascendentes
    - Exponenciales
    - Logarítmicas
    - Trígonométricas

FUNCIONES ALGEBRAICAS

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las funciones algebraicas pueden ser:

Funciones polinómicas

Son las funciones que vienen definidas por un polinomio.

$$\mathrm{f(x)}=\mathrm{a}_0 + a_1x + a_2x + a_3x + \ldots + a_nx^n$$

Su dominio es R , es decir, cualquier número real tiene imagen.

Funciones constantes

El criterio viene dado por un número real.

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{k}$ f(x) =5

La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.

Funciones polinómicas de primer grado

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$

Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función.

Son funciones de este tipo las siguientes:

Función lineal__________f(x) = 5x + 5

Función identidad_______ $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}$

Funciones polinómicas de segundo grado

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + bx + c$

siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$

Funciones cuadráticas________f(x) = 8x^2 - 6x + 3

Son funciones polinómicas de segundo grado

La gráfica de una función polinómica es una parábola.

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x + 3)(x - 3)}$$

El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

El criterio viene dado por un cociente entre polinomios:

Funciones radicales $\sqrt{X^4}$

El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.

El dominio de una función irracional de índice impar es R .

El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

GUÍA MODULO 15
CÁLCULO_EN_FENOMENOS_NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES

FUNCIONES TRASCENDENTES

La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Funciones exponenciales

$f(x)=a^x$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x.

Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$f(x)=\log_a x$

Funciones trigonométricas

Función sen	Función coseno	Función tangente	Función cosecante	Función secante	Función cotangente
f(X) = Sen 3X	f(X) = Cos 3X	f(X) = Tan 3X	f(X) = Csc 3X	f(X) = Sec 3X	f(X) = Ctg 3X

ENCONTRANDO VALORES DE FUNCIONES.

1. **Encontrar el valor de f (2) en la función $f(x) = 4x^2 + 8x + 4$**

Sustituimos a X con el valor de 2 en la función:

$f(X) = 4x^2 + 8x + 4$
$f(X) = 4(2)^2 + 8(2) + 4$
$f(X) = 4(4) + 8(2) + 4$
$f(X) = 16 + 16 + 4$
$f(X) = 36$

2. **El costo mensual C, en pesos, para llamadas locales en cierta compañía de teléfonos celulares esta dada por la siguiente función C = .50X + 5 donde x es el número de minutos usados si dispones de $94.00 pesos ¿Cuántas horas puedes usar el celular?**

$C = .50X + 5$	Función dada
$94 = .50X + 5$	Sustituir el costo por los pesos disponibles
$X = \frac{94-5}{.50}$	Despejar la variable x
$X = 89$	Este resultado se obtiene en minutos
$X = \frac{89}{60}$	Se divide el resultado entre 60 minutos que tiene la hora
$X = 1.4$	**Puede usarse el celular 1.4 horas**

GUÍA MODULO 15
CÁLCULO_EN_FENOMENOS_NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES

3.Si el lado de un terreno triangular mide una cuarta parte del perímetro, el segundo lado mide 15 metros, y el tercer lado mide dos terceras partes del perímetro ¿Cuál es el perímetro?

$P = \frac{1}{4}P + 15 + \frac{2}{3}P$ Se construye la función

$P - \frac{1}{4}P - \frac{2}{3}P = 15$ Se agrupan los términos con la misma variable

$\frac{12P - 3P - 8P}{12} = 15$ Se suman restan los términos semejantes, en este caso como son fracciones se resuelven por común denominador

$\frac{1P}{12} = 15$ Se despeja P

$P = (15)(12) \longrightarrow$ **P = 180 metros**

4.El volumen de un cono circular recto de R radio y H altura esta dado por la fórmula $V = 2R^2H$ se pide expresar la altura como una función explicita de V y R y encontrar el valor de la altura cuando R = 1 y V = 7 cm^3

$V = 2R^2H$ Fórmula dada

$H = \frac{V}{2R^2}$ Despejar a H y obtener la función explicita de H

$H = \frac{7}{2(1)^2}$ Sustituir los valores de V y R

$H = \frac{7}{2}$ Realizar operaciones

H = 3.5

5. En un estacionamiento las cuotas son las siguientes:

a) 5 pesos por la primera hora o fracción

b) 4 pesos por cada hora o fracción adicional a la primera

Determina la función y la gráfica que corresponde a esta situación

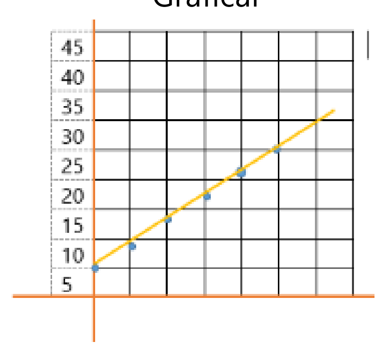
función

$f(x) = 5 + 4x$

Tabular valores de x

X	5 + 4X	Y	(X,Y)
0	5 + 4(0)	5	(0,5)
1	5 + 4(1)	9	(1,9)
2	5 + 4(2)	13	(2,13)
3	5 + 4(3)	17	(3,17)
4	5 + 4(4)	21	(4,21)
5	5 + 4(5)	25	(5,25)

Graficar



6.-De la función siguiente determina en que puntos cruza al eje X: f(X)= x^2 - 9

$y = x^2 - 9$ La variable Y siempre tendrá un valor de cero al cruzar cualquier lugar geométrico el eje X en el plano cartesiano

$0 = x^2 - 9$ Despejar la variable X

$X = \sqrt{9}$

$X = +3$ $X = -3$ Puntos por donde cruza la función al eje X

DOMINIO Y CONTRA DOMINIO DE UNA FUNCIÓN:

Para determinar el dominio de la función $y = x^2$

X	X^2	Y	(X, Y)
-5	$(-5)^2$	25	(-5, 25)
-2	$(-2)^2$	4	(-2, 4)
0	$(0)^2$	0	(0, 0)
3	$(3)^2$	9	(3 ,9)
6	$(6)^2$	36	(6, 36)
10	$(10)^2$	100	(10,100)

Si continuámos dando valores negativos a X (dominio) seguiriamos obteniendo valores reales para Y (contradominio), de igual forma si continuámos dando valor positivos a X (dominio) tambien los valores resultantes para Y (contradominio) serian reales, entonces concluimos que el dominio (valores de X) para eta función va desde menos infinito hasta infinito y el contradominio (valores de Y) solo seria valores positivos y el cero

Dominio = - ∞, ∞ **Contra dominio = 0, ∞**

FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUA

Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, si no presenta saltos o vacíos.

Una función es **discontinua** si no puede dibujarse de un solo trazo es decir si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente.

Caso especial:

En algunas funciones racionales que presentan una discontinuidad al darle un valor determinado a X que hace que el denominador se haga cero, se dice que existe una indeterminación, es decir no hay valor real para esta función, Sin embargo, al utilizar algún método de factorización podemos resolver y eliminar esta indeterminación cambiando su discontinuidad a continuidad de la siguiente forma:

EJEMPLO 1

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 2)}$$

$$f(x) = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2 + 2)}$$

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

Si le asignaramos el valor de -2 a la X , la función se indetermina es decir Y no tiene un valor real, ya que el denominador se hace cero en este caso se dice.

Se indetermina

Para quitar la indeterminación buscamos factorizar:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 2)}$$

$$\frac{(x + 2)}{(x + 2)} = 1$$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x + 2)}(x - 1)}{\cancel{(x + 2)}}$$

Procedimiento:

1.factorizar la función del numerador (Es un tgrinomio de la forma (ax^2 + bx +c)

2.Realizar operaciones de división

3.Eliminar términos

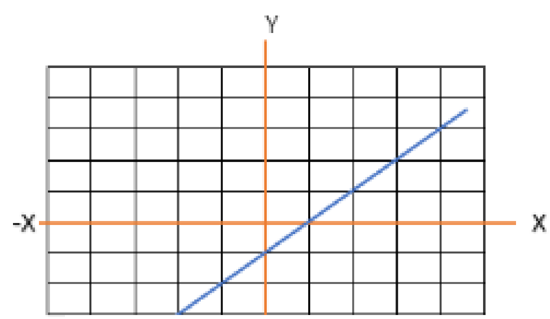
$$f(x) = 1\,(x - 1)$$

Gráfica:
F(x) = mx + b

Pendiente ordenada al origen

$$f(x) = 1\,x - 1$$

m =45° Ordenada al origen



La función es discontinua en -2.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre funciones son posibles y semejantes a las correspondientes efectuadas con los números.

Sean $f(x)$ =x+3 , $g(x)$ = x^2 + 5x + 6, s(x) = x, r(x)= (x + 5)

Función Suma
La función $f+g$ esta dada por: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
La suma de $f+g$ es: (x+3) +(x^2 + 5x + 6)= x^2 - 6x +9
Función Diferencia
La función $f-g$ esta dada por: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
La resta de $f-g$ es: (x+3) -(x^2 + 5x +6)= x + 3 - x^2 - 5x – 6 = - x^2 - 4x – 3

Función Producto

La función s . *r* esta dada por*: (s . r)(x) = s(x) * r(x)*

El producto de $s \cdot r$ es: x(x + 5)= $x^2 + 5x$

Función Cociente

La función $\frac{f}{g}$ esta dada por: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Está definida en todos los puntos en los que la función *g* no se anula.

El cociente de $\frac{f}{g}$ es: $\frac{x + 3}{x^2 + 5x + 6}$

LÍMITES

Límite: Es una magnitud a la que se acercan progresivamente los términos de una secuencia infinita de magnitudes. Un límite matemático, por lo tanto, expresa la tendencia de una función o de una sucesión mientras sus parámetros se aproximan a un cierto valor.

Ejemplos:

1. **Encontrar el valor del límite de la función f(x) = $8x^2$ - 6x + 3 cuando X⟶2**

$$\lim_{x\to 2} 8x^2 - 6x + 3$$
$$\lim_{x\to 2} 8(2)^2 - 6(2) + 3$$
$$\lim_{x\to 2} 8(2)^2 - 6(2) + 3$$
$$\lim_{x\to 2} 32 - 12 + 3$$
$$\lim_{x\to 2} = 23$$

Encontrar el valor del límite de la función f(x) = 5 cuando X ⟶2

$$\lim_{x\to 2} = 5$$

En este segundo ejemplo se proporciona una función constante, por lo cual no puede sustituirse el valor al que tiende el límite, por lo tanto, el valor resultante sigue siendo 5

2. Dadas las funciones :

g(x) = $x^3 - 2x^2 + 4$
f(x) = $(x^2 - 1)/x$
r(x) = $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 1)$

El elemento 5 es un número real del dominio de p ¿cual su imagen bajo la función p?

Solución : sustituir el valor 5 en cada una de las funciones

g(x) = $x^3 - 2x^2 + 4$	f(x) = $(x^2 - 1)/x$	r(x) = $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 1)$
g(x) = $(5)^3 - 2(5)^2 + 4$ g(x) = 125 - 50 +4 g(x) = 74	f(x) = $((5)^2 - 1)/5$ f(x) = $((5)^2 - 1)/5$ f(x) = 24/5 f(x) = 24/5 f(x) = 4.8	r(x) = $((5)^2 - 2(5) - 8)((5)^2 + 1)$ r(x) = (25 - 10 -8)(25 +1) r(x) = (7)(26) r(x) = 182

GUÍA MODULO 15
CÁLCULO_EN_FENOMENOS_NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES

DERIVADAS

El movimiento según su naturaleza describe la comparación entre magnitudes que cambian y cuando estas cambian instantáneamente requieren de la aplicación del caculo diferencial, para analizar este proceso llamado **razón de cambio** se utiliza la derivada de una función.

Razón de cambio: **Es la medida en que una variable cambia con respecto a otra.**

Calculo diferencial: **estudia el cambio de las variables dependientes cuando se modifican las variables independientes de las funciones.**

Derivada de una función: **Representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica a la función en un punto. En cualquier punto de una curva es la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.**

Reglas básicas de derivación y razones de cambio.

Regla De la función constante: $f'(c) = \frac{d}{dx}[c] = 0$

La derivada de una constante es cero. Veamos un ejemplo.

Función constante: f(x) = 7 derivada f '(x) = 0

Regla de la función identidad X: $f'(x) = \frac{d}{dx}[x] = 1$

La derivada de X es uno. Veamos un ejemplo.

Función x: f(x) = 9x derivada f '(x) = 9(1) = 9

Regla de la función potencia : $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}.$

la derivada de x^n es $n\,x^{n-1}$, entonces:

Función potencia $f(x)= x^5$ *derivada $f'(x)= 5x^4$*
Función potencia $f(x)= 3x^5$ *derivada $f'(x)= 3(5x^4) = 15x^4$*

Ejemplos:

1.- El volumen de un cubo de lado s es $V=s^3$ determina la razón de cambio del volumen con respecto a s cuando s= 5 centímetros

$V = S^3$ Función dada

$\frac{dv}{ds}=3S^{3-1}=3S^2$ Se deriva la función

$\frac{dv}{ds}=3(5)^2$ Sustituir el valor de S

$f'(5) = 75$

2.-La función de posición s(t) en metros de una persona que corre sobre una pista rectilínea de 200 metros en un tiempo t (en segundos) está dada por $s(t) = t^2 + 2$
¿Cuál es la razón de la variación de s(t) con respecto al t

$s(t) = t^2 + 2$ Función dada

$s(t) = 2t^{2-1}$ Derivamos la función

$s(t) = 2t$ Razón de la variación solicitada

3.-Un carrito de juguete se une a un cohete pirotécnico para brindarle propulsión, de tal manera que este se mueva en un tubo recto de 200 metros de largo. Registrar su posición (en metros) en función del tiempo (en segundos) se encuentra que está regida por la siguiente expresión $s(t) = t^2 + t$.

¿Cuál es la velocidad del carito a los 6 segundos?

$s(t) = t^2 + t$. Función dada

$s(t) = 2t^{2-1} + 1$. Derivar la función

$s(t) = 2t + 1$. Derivada

$s(5) = 2(6) + 1$ Sustituir el valor del tiempo

$s(5) = 13$ m/s Valor buscado.

4.- Una población de moscas crece en un recipiente grande de tal manera que su número (en cientos) a las t semanas esta dada por $p(t) = 15t^2 - 0.5t^4 + 2$

¿Cuál es la tasa de crecimiento de las moscas?

$p(t) = 15t^2 - 0.5t^4 + 2$ Función dada

$p(t) = 2(15)t^{2-1} – 4(0.5)t^{4-1} + 0$ Derivar la función

$p(t) = 30t - 2t^3$ Derivada

$p(t) = 30t - 2t^3$ tasa de crecimiento de las moscas

GUÍA MODULO 15
CÁLCULO_EN_FENOMENOS_NATURALES_Y_PROCESOS_SOCIALES

INTEGRALES

Existen distintos tipos de integrales, y cada una tiene sus propias características particulares que dan forma a su definición y concepto, e influyen en sus usos y aplicaciones. A continuación, te hablaré en forma resumida sobre algunos de los tipos de integrales.

Las integrales indefinidas corresponden al conjunto de funciones primitivas de una función, el cual no es más que **la suma entre las primitivas y la constante de integración**.

Al calcular una integral indefinida siempre se le añade la constante de integración, representada por la letra C, para expresar matemáticamente que la función tiene infinitas primitivas diferentes. Esto es debido a que **la derivada de una constante es igual a cero**, lo que quiere decir que son infinitas las constantes que pueden acompañar a la primitiva de una función obtenida por medio de la integración indefinida, formando así tantas funciones como constantes existan, es decir, infinitas.

La **integral de cero** es igual a la constante C. $\int 0dx = C$

La **integral de una constante** es igual a la constante por la variable x. $\int kdx = k \cdot x + C$

$$\int \mathbf{8\,x\,dx = 8x}$$

La **integral de una potencia** es igual a la variable elevada a la potencia (n + 1) sobre (n + 1) sumando siempre una constante.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int X^{20} dx = 20\frac{x^{20+1}}{20+1} = 20\frac{x^{21}}{21} + \mathrm{c}$$

$$\int u^n \cdot u' du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int (4X + 3)^3 4dx = \frac{(4x+3)^{3+1}}{3+1} = \frac{(4x+3)^4}{4} + C$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si crees que calcular áreas que se localizan bajo las curvas es un proceso tedioso, estarías en lo correcto. Encontrar el límite de una suma de Riemann puede ser muy aburrido. Afortunadamente, existe un método más sencillo. En esta sección, veremos un método general para calcular integrales al utilizar antiderivadas.

El teorema fundamental del cálculo aclara la relación entre las derivadas y las integrales. La integración realizada en una función puede revertirse por la diferenciación.

El teorema fundamental del cálculo

Si una función $f(x)$ se define por el intervalo $[a,b]$ y si $F(x)$ es la antiderivada de f en $[a,b]$, entonces:

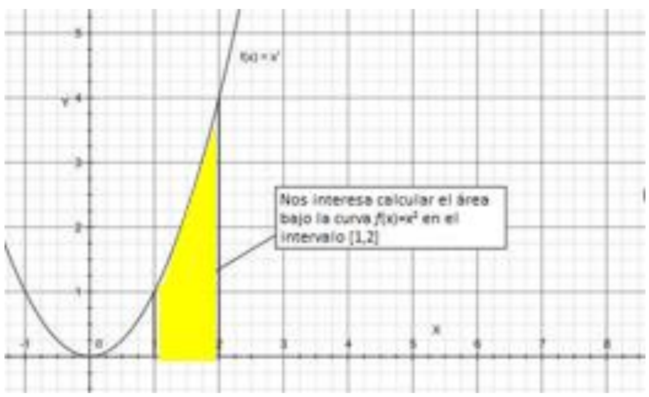
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Ejemplo:

Calcula $\int_1^2 x^2$

Solución:

Esta integral nos dice que debemos calcular el área bajo la curva $f(x)=x^2$, la cual es una parábola, sobre el intervalo [1, 2], como lo muestra la siguiente figura.



Para calcular la integral de acuerdo el teorema fundamental del cálculo necesitamos encontrar la Integral $f(x)=x^2$

$$\int x^2dx$$

Integrar con la fórmula de exponencial

$$\int \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_1^2$$

Aplicamos el teorema del cálculo fundamental

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

$$\left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{7}{3}$$